|  |
| --- |
|  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| [**Двойственность в линейном программировании**](http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/dvoistvennost_v_lineinom_programmirovanii.htm)  **ПРЯМАЯ  И  ДВОЙСТВЕННАЯ  ЗАДАЧИ**  Каждой задаче линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую задачу линейного программирования, называемую **двойственной** или **сопряженной** по отношению к **исходной** или **прямой**. Связь исходной и двойственной задач заключается главным образом в том, что решение одной из них может быть получено непосредственно из решения другой. Дадим определение двойственной задачи по отношению к общей задаче линейного программирования (табл. 11.1).   Таблица 11.1   |  |  | | --- | --- | | Исходная задача | Двойственная задача | | 1. http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/pryam_i_dv_zad.files/image002.gif | 1'. http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/pryam_i_dv_zad.files/image004.gif | | 2. http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/pryam_i_dv_zad.files/image006.gif | 2'. http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/pryam_i_dv_zad.files/image008.gif | | 3. http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/pryam_i_dv_zad.files/image010.gif | 3'. http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/pryam_i_dv_zad.files/image012.gif | | 4. http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/pryam_i_dv_zad.files/image014.gif | 4'. http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/pryam_i_dv_zad.files/image016.gif | | 5. http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/pryam_i_dv_zad.files/image018.gif | 5'. http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/pryam_i_dv_zad.files/image020.gif | |

|  |
| --- |
| **11.2. ПРАВИЛА  СОСТАВЛЕНИЯ  ДВОЙСТВЕННОЙ  ЗАДАЧИ**  **1.** Каждому *i*-му ограничению исходной задачи соответствует переменная  http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/pravila_sost.files/image002.gif двойственной задачи и, наоборот, каждому *j-*му ограничению двойственной задачи соответствует переменная http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/pravila_sost.files/image004.gif исходной задачи.  **2.** Матрицы **А** ограничений 1 – 2 и **А**' ограничений 3' – 4' (см. табл. 11.1) взаимно транспонированы. Следовательно, строка коэффициентов http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/pravila_sost.files/image006.gif в *j-*м ограничении двойственной задачи есть столбец коэффициентов при http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/pravila_sost.files/image004.gif в ограничениях 1 – 2 исходной задачи, и наоборот.  **3.** Свободные члены ограничений одной из задач являются коэффициентами при соответствующих переменных в целевой функции другой задачи. При этом максимизация меняется на минимизацию, и наоборот.  **4.** В каждой задаче ограничения-неравенства следует записывать со знаком «≤» при максимизации и со знаком «≥» – при минимизации.  **5.** Каждому *i-*му ограничению-неравенству исходной задачи соответствует в двойственной задаче условие неотрицательности http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/pravila_sost.files/image009.gif, а равенству – переменная http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/pravila_sost.files/image002.gif без ограничения на знак. Наоборот, неотрицательной переменной http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/pravila_sost.files/image012.gif соответствует в двойственной задаче *j-*е ограничение - неравенство, а произвольной переменной – равенство. |
|  |

|  |
| --- |
| **11.3.  СВЯЗЬ  МЕЖДУ  РЕШЕНИЯМИ  ПРЯМОЙ  И  ДВОЙСТВЕННОЙ  ЗАДАЧ**          Существование зависимости между решениями прямой и двойственной задач характеризуются следующими леммами и теоремами двойственности.  **Лемма 11.1** (основное неравенство теории двойственности). *Если http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image002.gif – некоторый план исходной задачи, а http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image004.gif – произвольный план двойственной задачи, то значение целевой функции исходной задачи при плане http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image002.gif всегда не превосходит значение целевой функции двойственной задачи при плане http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image004.gif, т.е. http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image006.gif*  **Лемма 11.2.** *Если http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image008.gif и http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image010.gif – допустимые решения взаимно двойственных задач, для которых выполняется равенство http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image012.gif, то http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image014.gif – оптимальное решение исходной задачи, а http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image016.gif – оптимальное решение двойственной задачи.*  **Теорема 11.1.** Первая теорема двойственности (основная теорема двойственности). *Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальный план http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image018.gif, то и другая имеет оптимальный план http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image020.gif и значения целевых функций задач при их оптимальных планах равны между собой, т. е.*  http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image022.gif.  *Если же целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена (для исходной – сверху, для двойственной – снизу), то область допустимых решений другой задачи пустая.*  Из этой теоремы вытекают необходимые и достаточные условия:  a)   **разрешимости** задач – существование хотя бы одного допустимого плана у каждой задачи;  б) **оптимальности**допустимых  планов  **X**  и  **Y** – выполнение  равенства *F*(**X**) *= T*(**Y**)*.*  **Теорема 11.2.** Вторая теорема двойственности (теорема о дополнительной нежесткости)*.* *Для того чтобы два допустимых решения http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image018.gif и http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image020.gif пары двойственных задач были их оптимальными решениями, необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли системе уравнений*  http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image025.gif(\*)  http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image027.gif(\*\*)          Данная теорема позволяет:  a) установить оптимальность решения одной задачи по свойствам решения двойственной;  б) найти оптимальное решение одной задачи по решению двойственной.  Теорема верна для симметричной двойственной пары. Для задач в канонической и общей формах соотношения (\*) и (\*\*) верны только для ограничений в виде неравенств и для неотрицательных переменных.  Полученные выше результаты непосредственно характеризуют взаимосвязь прямой и двойственной  задач:  1.     В оптимуме  http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image029.gif  2.     На любой итерации процесса решения прямой задачи  http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image031.gif  Эти соотношения позволяют дать важную экономическую интерпретацию двойственности и переменным двойственной задачи. Чтобы сделать это с помощью некоторых формальных категорий, рассмотрим прямую задачу как задачу распределения ограниченных ресурсов с целевой функцией, подлежащей максимизации. Условия прямой задачи можно интерпретировать следующим образом. Коэффициент http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image033.gif представляет собой **прибыль**, приходящуюся на единицу продукции http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image035.gif-го вида производственной деятельности. Расход ресурса http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image037.gif, запасы которого ограничены величиной http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image039.gif, на единицу продукции http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image035.gif-го вида производственной деятельности равен http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image041.gif единицам этого ресурса. Переменные двойственной задачи http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image043.gif представляют **ценность** единицы ресурса http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image037.gif (в экономической литературе они получили различные названия: **неявные**, **учетные**, **теневые**).  Двойственные оценки могут быть использованы для определения приоритета используемых ресурсов в соответствии с их вкладом в величину целевой функции.  В соответствии с основным неравенством теории двойственности в случае неоптимальных допустимых решений http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image045.gif. Формулировка этого неравенства в рамках экономической интерпретации выглядит следующим образом:  (Прибыль) < (Общая ценность ресурсов).  Из этого соотношения следует, что до тех пор, пока прибыль меньше суммарной ценности ресурсов, решение остается неоптимальным. Оптимум достигается в случае, когда прибыль становится равной общей ценности ресурсов.  Чтобы дать представление о соответствующих обозначениях, часто встречающихся в литературе по линейному программированию, введем следующее определение:  http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image047.gif  – суммарная оценка ресурсов, используемых при производстве единицы продукции  http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image035.gif-го вида.  Разность http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image049.gif равна фигурирующему в симплекс-таблице http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image051.gif-коэффициенту при переменной http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image053.gif (в наших обозначениях http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image055.gif). Ее часто называют**приведенными издержками** http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image035.gif-го вида производственной деятельности.  Условие оптимальности (в задаче максимизации), используемое в симплекс-методе, состоит в том, что вид производственной деятельности, не представленный в текущем решении (ему соответствует независимая переменная http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image057.gif) должен вводиться в последующее решение с отличным от нуля и положительным уровнем использования (http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image059.gif) только в том случае, когда http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image051.gif-коэффициент при данной переменной отрицателен. Дадим экономическую интерпретацию этому условию. Неиспользованный  вид производственной деятельности http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image035.gif должен быть представлен в решении только в том случае, если http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image061.gif, т.е. когда  http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image063.gif  Таким образом, пока прибыль превышает суммарную оценку ресурсов, уровень использования данного вида производственной деятельности следует увеличивать. Следует заметить, что мы увеличиваем уровень его использования до того значения, при котором http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/svyaz_mezhdu_resh.files/image051.gif-коэффициент при данной переменной станет равным нулю. Это эквивалентно полной реализации всех возможностей, связанных с получением прибыли от данного вида производственной деятельности. |